Informations : Tous documents et calculatrices autorisés. Pas d'ordinateurs.

9 questions, 2 point par question et 2 points pour le soin général. les points sont donnés si la réponse est juste précise et concise ; si la réponse comporte des phrases non pertinentes celles-ci ne sont pas prises en compte ; si une question ne paraît pas claire il faut la reformuler clairement (et écrire cette reformulation) avant de donner une réponse ; si l'utilisation d'autres notations que les officielles (celles que le texte introduit) s'avère nécessaire, il faut alors écrire la définition de ces nouvelles notations à partir des notations officielles avant de les utiliser.

Question 1

On donne la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 1+x^n-x^p \end{array}$ où $n>0$ et $p>0$ sont deux entiers.

a) Écrire avec cette fonction f un pas de la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x)=0$.

b) Écrire l'algorithme complet de résolution de l'équation (en langage d'algorithme, pas en langage de maxima).

c) Cet algorithme fonctionne-t-il toujours ? Si non corriger l'algorithme de b) pour qu'il fonctionne toujours.

Question 2

On cherche à trouver le maximum d'une fonction quelconque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un intervalle $[a,b]$. Pour cela on procède de la façon suivante : si on donne quatre nombres t, x, y et z éléments de $[a,b]$ et tels que $t<x<y<z$, on calcule $f(t)$, $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ puis $u=f(x)-f(t)$, $v=f(y)-f(x)$ et $w=f(z)-f(y)$ et on décide que

$u>0$ et $v>0$ et $w>0$ $\Longrightarrow$ l'estimation du maximum est $f(z)$

$u>0$ et $v>0$ et $w<0$ $\Longrightarrow$ les nouveaux nombres t, x, y et z sont alors $x, x+1/3\,(z-x), x+2/3\,(z-x), z$

$u>0$ et $v<0$ et $w>0$ $\Longrightarrow$ les nouveaux nombres t, x, y et z sont alors $t, t+1/3\,(y-t), t+2/3\,(y-t), y$

$u>0$ et $v<0$ et $w<0$ $\Longrightarrow$ les nouveaux nombres t, x, y et z sont alors $t, t+1/3\,(y-t), t+2/3\,(y-t), y$

$u<0$ et $v>0$ et $w>0$ $\Longrightarrow$ l'algorithme échoue

$u<0$ et $v>0$ et $w<0$ $\Longrightarrow$ les nouveaux nombres t, x, y et z sont alors $x, x+1/3\,(z-x), x+2/3\,(z-x), z$

$u<0$ et $v<0$ et $w>0$ $\Longrightarrow$ l'algorithme échoue

$u<0$ et $v<0$ et $w<0$ $\Longrightarrow$ l'estimation du maximum est $f(x)$

soit on a trouvé une estimation du maximum cherché, soit on a trouvé que l'algorithme échouait, soit on a trouvé de nouveaux nombres avec lesquels on peut répéter les opérations jusqu'à ce que la différence $z-t$ soit inférieure à un seuil fixé d'avance.

d) Il est demandé de traduire cette description verbeuse en langage d'algorithme.

Question 3 On souhaite calculer numériquement, avec une méthode de Runge-Kutta, la solution de

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t^2+x^2} \quad \text{et} \quad x(0)=x_0>0$$

e) On donne le tableau des 3/8

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

écrire le premier pas de calcul du temps 0 au temps h.

f) Écrire le système sous forme autonome, et écrire le premier pas de l'algorithme des 3/8 entre 0 et h.

g) On considère la méthode emboîtée

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}$$

écrire le premier pas de l'algorithme en insistant sur la validation du pas de temps.

Question 4

On considère l'équation

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=0$$

h) si $x(0)=x_0$ et $\frac{dx}{dt}(0)=v_0$, est-ce un problème à valeur initiale ou à valeur aux limites ? Dans le cas où c'est un problème à valeurs initiales, le mettre sous une forme assimilable par une méthode de Runge-Kutta. Dans l'autre cas écrire la formulation faible du problème.

i) si $x(0)=x_0$ et $x(T)=x_1$. Même question qu'en i).